

Hakens Lemma

Hausarbeit zur Vorlesung Kirby-Kalkül bei Dr. Marc Kegel

Lennart Struth

12. Juli 2018

Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit ist es, Kompression von Flächen in 3-Mannigfaltigkeiten zu diskutieren und mithilfe dieser das sogenannte Lemma von Haken zu beweisen. Dieses besagt, dass jede Heegaard-Zerlegung einer geschlossenen, orientierbaren und reduziblen 3-Mannigfaltigkeit reduzibel ist, das heißt, dass es eine einfach geschlossene Kurve auf der Heegaard-Fläche gibt, die in den Henkelkörpern jeweils eine Scheibe berandet. Als Anwendungen dieser Aussage zeigen wir die Additivität des Heegaard-Geschlechts unter verbundener Summe und die Existenz einer Primfaktorzerlegung.

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbereitungen	1
1.1 Verbundene Summe von 3-Mannigfaltigkeiten	1
1.2 Zerlegung von 3-Mannigfaltigkeiten	2
1.3 Kompression von Flächen in 3-Mannigfaltigkeiten	3
1.4 Heegaard-Zerlegungen	6
2 Das Lemma von Haken	8
3 Anwendungen	10
3.1 Additivität des Heegaard-Geschlechts	10
3.2 Primfaktorzerlegung	11

1. Vorbereitungen

1.1. Verbundene Summe von 3-Mannigfaltigkeiten

Zunächst werden wir den Begriff der verbundenen Summe nach [1] wiederholen.

Definition 1. Seien M und N orientierte, zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeiten. Die **verbundene Summe** $M\#N$ von M und N ist die orientierte, zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit, die entsteht durch Entfernen eines offenen 3-Balls aus M und N und Verkleben der entstehenden S^2 -Ränder mittels eines orientierungsumkehrenden Homöomorphismus.

Man kann zeigen, dass diese Definition nicht von der Wahl der 3-Bälle und nicht von der Wahl des Homöomorphismus abhängt. Wir übergehen es an dieser Stelle, dies zu zeigen und nehmen die Wohldefiniertheit der verbundenen Summe an.

Beispiel 2. Für jede orientierbare 3-Mannigfaltigkeit M erhalten wir $M \# S^3 = M$. Wir bezeichnen eine verbundene Summe als **nicht-trivial**, falls kein Summand die 3-Sphäre ist.

Im Folgenden werden wir sowohl von Summanden als auch Faktoren von verbundenen Summen von 3-Mannigfaltigkeiten sprechen. Die Begriffe werden gleichbedeutend verwendet.

1.2. Zerlegung von 3-Mannigfaltigkeiten

Als Nächstes betrachten wir Zerlegungen von 3-Mannigfaltigkeiten. Dabei setzen wir stets voraus, dass die Mannigfaltigkeiten geschlossen, zusammenhängend und orientierbar sind. Die Darstellungen dieses Abschnitts folgen im Wesentlichen [1].

Definition 3. Eine orientierbare und zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit M heißt **prim**, falls sie nicht als nicht-triviale verbundene Summe zweier 3-Mannigfaltigkeiten geschrieben werden kann.

Eine **Zerlegung** von M ist eine Faktorisierung $M = M_1 \# \dots \# M_n$ mit M_i zusammenhängend und orientierbar. Gilt $M_i \neq S^3$ für alle i , so heißt die Zerlegung **nicht-trivial**, andernfalls heißt sie **trivial**. Sind die Faktoren M_i einer nicht-trivialen Zerlegung außerdem prim, bezeichnen wir die Zerlegung auch als **Primfaktorzerlegung**.

Beispiel 4. Nach dem Satz von Alexander (Satz 3.11 in [1]) berandet jede eingebettete 2-Sphäre in der 3-Sphäre S^3 einen 3-Ball. Demnach ist die einzige Zerlegung von S^3 als verbundene Summe die triviale Zerlegung und folglich S^3 prim.

Definition 5. Eine 3-Mannigfaltigkeit M heißt **irreduzibel**, falls jede eingebettete 2-Sphäre einen 3-Ball berandet. Andernfalls heißt M **reduzibel**.

Im Allgemeinen sind die Begriffe irreduzibel und prim nicht äquivalent: M heißt bereits prim, wenn jede eingebettete, trennende, das heißt die Mannigfaltigkeit in zwei Zusammenhangskomponenten trennende, 2-Sphäre einen 3-Ball in M berandet. Ist M irreduzibel, ist M also auch prim. Die Umkehrung gilt nicht, da eine eingebettete Sphäre im Allgemeinen die Mannigfaltigkeit nicht trennt. Es stellt sich im folgenden Satz 6 heraus, dass solche nicht-trennenden Sphären nur in speziellen Mannigfaltigkeiten auftreten.

Satz 6. Sei M eine geschlossene, orientierbare 3-Mannigfaltigkeit, die eine eingebettete nicht-trennende 2-Sphäre enthält. Dann gibt es eine Zerlegung $M = M' \# S^1 \times S^2$.

Beweis. Sei S eine solche eingebettete, nicht-trennende 2-Sphäre und γ eine eingebettete 1-Sphäre, die S in genau einem Punkt transversal schneidet. Weiterhin sei N eine in M reguläre Umgebung der Vereinigung $S \cup \gamma$. Dann ist N homöomorph zu $S^1 \times S^2 - D^3$ und der Rand ∂N von N ist eine trennende 2-Sphäre in M , die die gewünschte Zerlegung $M = M' \# S^1 \times S^2$ liefert. \square

Folglich ist $S^1 \times S^2$ die einzige geschlossene, orientierbare 3-Mannigfaltigkeit, die prim, aber nicht irreduzibel ist.

Beispiel 7. Der Beweis des Satzes 6 ist am Beispiel von $M = S^1 \times S^2$ anschaulich nachzuvollziehen: Man kann zeigen, dass $S^1 \times S^2$ eine Henkelzerlegung mit genau einem Henkel von jedem Index hat mit dem planaren Heegaard-Diagramm in Abbildung 1. Es sind dargestellt die Ankleberegion des 1-Henkels (schwarz) und die Anklebesphäre A_2 des 2-Henkels (braun).

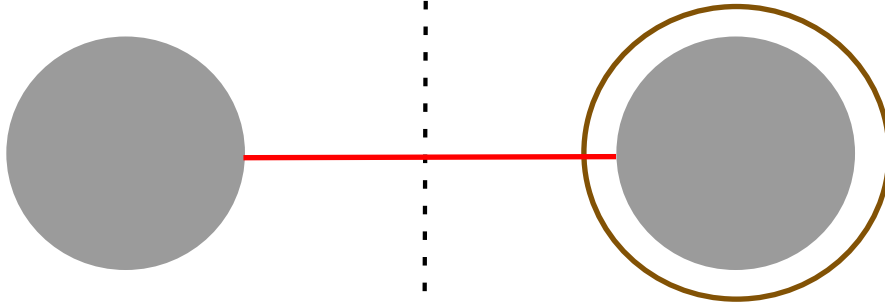


Abbildung 1: Konstruktion des Beweises von Satz 6 für $M = S^1 \times S^2$

Betrachten wir die Vereinigung des Kerns des 2-Henkels mit einer eigentlich eingebetteten 2-Scheibe $(D, \partial D) \subset (h_0, A_2)$ im 0-Henkel, so erhalten wir eine M nicht trennende Sphäre S , die den Rand ∂h_0 des 0-Henkels genau in der Anklebesphäre A_2 des 2-Henkels schneidet.

Eine einfach geschlossene Kurve γ , die die Sphäre S in genau einem Punkt schneidet, ist durch die rote Kurve in Abbildung 1 gegeben. Man sieht nun, dass es eine reguläre Umgebung $N = S^1 \times S^2 - D^3$ der Vereinigung $\gamma \cup S$ gibt, deren Rand ∂N eine trennende Sphäre ist, die die triviale Zerlegung $S^1 \times S^2 = M = S^1 \times S^2 \# S^3$ liefert.

1.3. Kompression von Flächen in 3-Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt diskutieren wir Kompression und Randkompression von Flächen (kompakte, orientierbare 2-Mannigfaltigkeiten) in 3-Mannigfaltigkeiten. Dies wird ein zentraler Begriff im Beweis des Lemmas von Haken sein. Der Begriff der Inkomprimierbarkeit ist in der Literatur verschieden definiert. Die diesbezüglichen Darstellungen in dieser Arbeit orientieren sich gleichermaßen an [1] und [4].

Definition 8. Eine zusammenhängende, in eine 3-Mannigfaltigkeit M eigentlich eingebettete Fläche Σ heißt **komprimierbar**, falls für jede Komponente von Σ eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist.

- (1) Σ ist eine Sphäre, die in M einen Ball berandet.
- (2) Σ ist keine Sphäre und es gibt eine nicht-triviale, das heißt in Σ keine Scheibe berandende, einfach geschlossene Kurve γ auf der Fläche Σ , die in $M - \Sigma$ eine eingebettete Scheibe D berandet.

Andernfalls heißt Σ **inkomprimierbar**.

Zu dieser Definition ist zunächst anzumerken, dass eine eingebettete Sphäre, die die Mannigfaltigkeit nicht trennt, stets inkomprimierbar ist. Umgekehrt ist eine Mannigfaltigkeit, in der jede eingebettete Sphäre komprimierbar ist, irreduzibel.

Gibt es eine eingebettete Sphäre, die inkomprimierbar ist, also keinen Ball in M berandet, aber die Fläche trennt, liefert Aufschnneiden der Mannigfaltigkeit entlang dieser Sphäre eine nicht-triviale Zerlegung von M als verbundene Summe. Eine solche Sphäre heißt daher auch **reduzierende Sphäre**.

Als **Kompression einer Fläche** bezeichnen wir im Fall, dass Bedingung (2) von Definition 8 gilt, das Aufschnneiden von Σ entlang einer solchen einfach geschlossenen Kurve und anschließende Einkleben zweier paralleler, disjunkter Kopien der eingebetteten Scheibe D an den beiden entstehenden Randkomponenten. Falls Bedingung (1) erfüllt ist, bezeichnet die Kompression der Fläche das 'Löschen' der Sphäre. Das folgende Beispiel macht dies anschaulich.

Beispiel 9. Wir betrachten einen 2-Torus Σ in \mathbb{R}^3 (Abbildung 2 links). Die in der Abbildung rot gezeichnete Kurve γ beschreibt eine nicht-triviale, einfach geschlossene Kurve auf dem Torus, die eine in \mathbb{R}^3 eingebettete Scheibe D berandet. Es ist also Bedingung (2) in Definition 8 erfüllt.

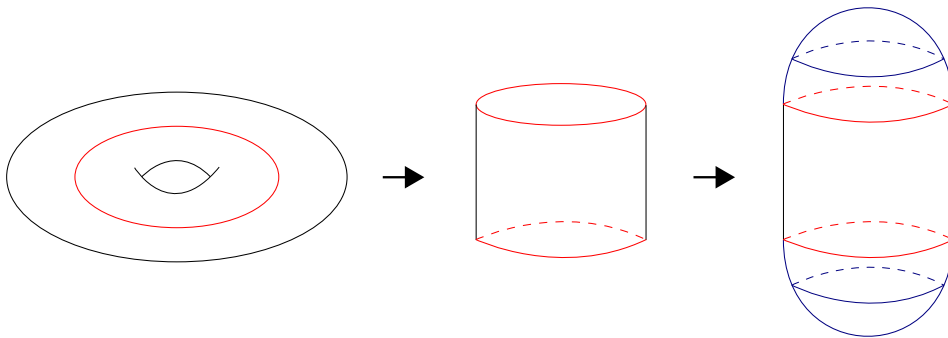


Abbildung 2: Kompression eines 2-Torus in \mathbb{R}^3

Aufschnneiden entlang dieser Kurve liefert einen Zylinder (Abbildung 2 Mitte), dessen Randkomponenten durch das Aufschnneiden entstanden sind. Kleben wir nun zwei disjunkte Kopien von D (grün) jeweils an die Randkomponenten (Abbildung 2 rechts), erhalten wir eine 2-Sphäre. Die entstandene Fläche Σ' erfüllt nun Bedingung (1) in Definition 8 und kann somit zur leeren Menge komprimiert werden.

Es ist möglich, dass eine durch Kompression entstandene Fläche nicht mehr zusammenhängend ist. Da wir diesen Prozess iterieren wollen, bis die entstehende Fläche inkomprimierbar ist, wollen wir auch von Komprimierbarkeit nicht zusammenhängender Flächen sprechen können. Dazu erweitern wir Definition 8 und fordern, dass eine der beiden Bedingungen (1) oder (2) für eine Komponente der Fläche Σ gelten muss.

Da wir auch Flächen mit Rand zulassen, benötigen wir außerdem einen weiteren Begriff.

Definition 10. Eine zusammenhängende, in eine 3-Mannigfaltigkeit M eigentlich eingebettete Fläche $(\Sigma, \partial\Sigma) \subset (M, \partial M)$ heißt **randkomprimierbar**, falls eine der folgenden Bedingungen gilt.

- (1) Σ ist eine Scheibe, die gemeinsam mit einer Scheibe in ∂M einen Ball berandet.
- (2) Σ ist keine Scheibe und es gibt einen eigentlichen Bogen α auf Σ , der nicht-trivial ist, das heißt nicht mit einem Bogen in $\partial\Sigma$ gemeinsam eine Scheibe in Σ berandet, und gemeinsam mit einem Bogen β in $\partial M - \partial\Sigma$ eine Scheibe D in $M - \Sigma$ berandet.

Andernfalls heißt Σ **randinkomprimierbar**.

Analog zur Kompression von Flächen beschreiben wir den Prozess der **Randkompression**: Falls Bedingung (2) in Definition 10 erfüllt ist, schneiden wir die Fläche Σ entlang des Bogens α auf und kleben zwei disjunkte, parallele Kopien der Scheibe D an die entstehenden Randkomponenten, so dass wir wieder eine eigentlich eingebettete Fläche Σ' erhalten. Falls Bedingung (1) gilt, 'löschen' wir wieder die Fläche.

Analog zur Komprimierbarkeit erweitern wir den Begriff der Randkomprimierbarkeit auf nicht-zusammenhängende Flächen.

Beispiel 11. Wir wollen auch den Prozess der Randkompression an einem Bild veranschaulichen. Dazu betrachten wir eine in zum Beispiel einen Halbraum $M = \mathbb{R}_+^3$ eigentlich eingebettete, kompakte und orientierbare Fläche Σ vom Geschlecht 2 mit einer Scheibe entfernt (Abbildung 3 links).

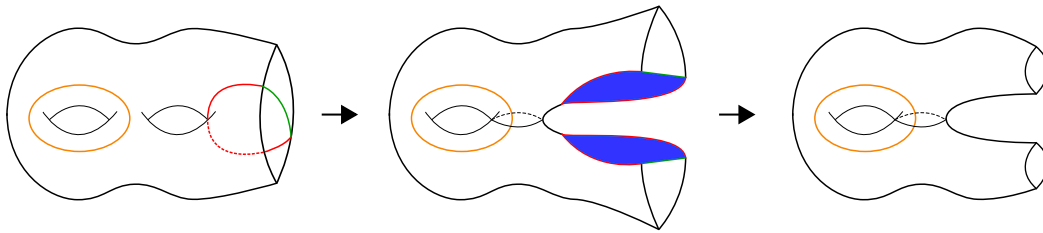


Abbildung 3: Randkompression einer Fläche mit Rand

Die rote Kurve α in Abbildung 3 links auf Σ ist ein eigentlicher, nicht-trivialer Bogen auf der Fläche und berandet gemeinsam mit dem grünen Bogen $\beta \subset \partial M - \partial\Sigma$ eine 2-Scheibe D in $M - \Sigma$. Es ist also Bedingung (2) in Definition 10 erfüllt und wir können die Fläche randkomprimieren. Dazu schneiden wir Σ längs des Bogens α auf und kleben zwei disjunkte, parallele Kopien von D (in Abbildung 3 blau) an die entstehenden Randkomponenten (Abbildung 3 Mitte). Wir erhalten wieder eine eigentlich eingebettete Fläche Σ' mit Rand (Abbildung 3 rechts).

Bemerkung 12. Falls die Fläche Σ inkomprimierbar ist gemäß Definition 8, ist auch eine durch Randkompression aus Σ entstehende Fläche Σ' inkomprimierbar: Sei D' eine komprimierende Scheibe von Σ' (Rand einer solchen Scheibe ist in Abbildung 3 zum Beispiel die orange Kurve), dann ist D' eigentlich isotop zu einer Scheibe D mit Rand im Durchschnitt $\Sigma \cap \Sigma'$.

Das heißt also, dass wir eine in einer 3-Mannigfaltigkeit eigentlich eingebettete Fläche Σ zunächst komprimieren und dann randkomprimieren können, bis die entstehende

Fläche Σ' inkomprimierbar und randinkomprimierbar ist. Wie bereits oben beschrieben, ist allerdings im Allgemeinen die Anzahl der Komponenten von Σ und Σ' verschieden.

1.4. Heegaard-Zerlegungen

Wir wollen nun diese Überlegungen verwenden, um den Zusammenhang von Heegaard-Zerlegungen und reduzierenden Sphären zu diskutieren. Dabei folgen wir [1].

Definition 13. Eine **Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht g** einer geschlossenen, orientierbaren 3-Mannigfaltigkeit M ist eine Zerlegung $M = H_1 \cup_\phi H_2$, wobei H_i Henkelkörper vom Geschlecht g sind und $\phi: \partial H_2 \rightarrow \partial H_1$ ein orientierungsumkehrender Homöomorphismus ist.

Die Frage nach der Existenz einer Heegaard-Zerlegung liefert der folgende Satz. Ein Beweis findet sich in [5].

Satz 14. *Sei M eine geschlossene, orientierbare 3-Mannigfaltigkeit. Dann besitzt M eine Heegaard-Zerlegung.*

Weiterhin ist zunächst offen, ob sich der Begriff der Heegaard-Zerlegung auch für allgemeinere 3-Mannigfaltigkeiten definieren lässt. Man kann die Forderungen nach Geschlossenheit und Orientierbarkeit in der Definition des Begriffs zwar ohne Probleme weglassen, stellt aber fest, dass umgekehrt jede 3-Mannigfaltigkeit, die eine Heegaard-Zerlegung besitzt, schon geschlossen und orientierbar ist. Dies, wie auch die Aussage des folgenden Beispiels, ist gezeigt in [2].

Beispiel 15. Die 3-Sphäre ist die einzige geschlossene, orientierbare 3-Mannigfaltigkeit mit einer Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht 0. Weiterhin gibt es für jedes $g \geq 0$ eine, nach dem Satz von Waldhausen (3.26 in [1]) eindeutige, Heegaard-Zerlegung von S^3 vom Geschlecht g : Bettet man einen Henkelkörper H vom Geschlecht g in S^3 ein, sieht man, dass das Komplement $S^3 - H$ auch ein Henkelkörper vom Geschlecht g ist und kann die beiden Henkelkörper in offensichtlicher Weise zu S^3 verkleben.

Wir wollen nun einen Zusammenhang zwischen inkomprimierbaren Flächen und Heegaard-Zerlegungen herstellen.

Definition 16. Sei M eine 3-Mannigfaltigkeit mit Heegaard-Zerlegung $M = H_1 \cup_\phi H_2$ vom Geschlecht g . Eine **Heegaard-reduzierende Sphäre** S in M ist eine trennende 2-Sphäre, die die Henkelkörper H_i jeweils in einer eigentlich eingebetteten, nicht-trivialen Scheibe schneidet, so dass der Durchschnitt dieser Scheibe und der Heegaard-Fläche eine nicht-triviale, einfach geschlossene Kurve ist.

Eine Heegaard-reduzierende Sphäre S ist insbesondere eine trennende Sphäre, liefert also eine Zerlegung von M als verbundene Summe $M = M_1 \# M_2$. Da $S \cap H_i$ jeweils eine in H_i eigentlich eingebettete Scheibe ist, induziert die Zerlegung $M = M_1 \# M_2$ der Mannigfaltigkeit außerdem Heegaard-Zerlegungen $M_i = H_1^i \cup H_2^i$ der beiden Faktoren vom Geschlecht g_i mit $g_1 + g_2 = g$.

Existiert, gegeben eine Heegaard-Zerlegung von M , eine Heegaard-reduzierende Sphäre, heißt die Heegaard-Zerlegung **reduzibel**.

Beispiel 17. Wir betrachten eine Heegaard-Zerlegung der irreduziblen 3-Sphäre S^3 vom Geschlecht 2 mit Heegaard-Fläche Σ wie in Beispiel 15. Dann ist eine Heegaard-reduzierende Sphäre S der trivialen Zerlegung $S^3 = M = M_1 \# M_2 = S^3 \# S^3$ mit Geschlecht $2 = g = g_1 + g_2 = 1 + 1$ gegeben durch die in Abbildung 4 grün angedeutete Sphäre, die die Henkelkörper in den vom Durchschnitt $S \cap \Sigma$ berandeten, nicht-trivialen und in die Henkelkörper der Heegaard-Zerlegung von M eigentlich eingebetteten Scheiben schneidet. Dabei ist der Durchschnitt, in Abbildung 4 rot, von S mit der Heegaard-Fläche eine nicht-triviale, einfach geschlossene Kurve auf Σ .

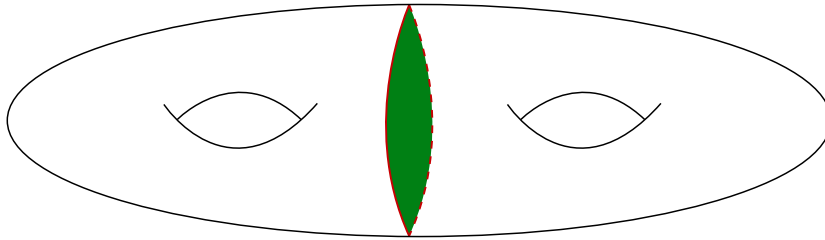


Abbildung 4: Eine Heegaard-reduzierende Sphäre in einer Heegaard-Zerlegung von S^3

Beispiel 18. Als weiteres Beispiel betrachten wir die verbundene Summe von $S^1 \times S^2$ und dem reell-projektiven Raum $\mathbb{R}P^3$. In [2] wird gezeigt, dass $S^1 \times S^2 = L(0, 1)$ und $\mathbb{R}P^3 = L(2, 1)$ gilt, wobei $L(p, q)$ den Linsenraum mit Koeffizienten $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ bezeichnet. Wir haben in [5] gesehen, dass dann ein planares Heegaard-Diagramm der verbundenen Summe $S^1 \times S^2 \# \mathbb{R}P^3$ durch Übereinanderschreiben der planaren Heegaard-Diagramme der beiden Faktoren wie in Abbildung 5 gegeben ist.

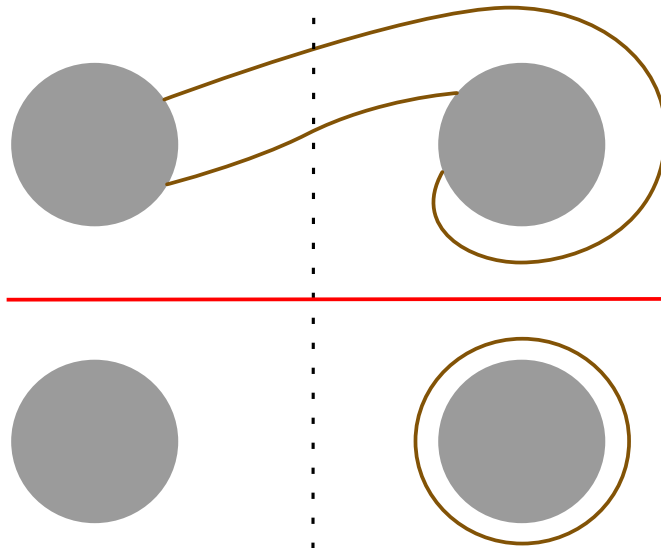


Abbildung 5: Eine reduzierende Sphäre in einer Heegaard-Zerlegung von $S^1 \times S^2 \# \mathbb{R}P^3$

Im Diagramm sind die Ankleberegionen der 1-Henkel (schwarz) und die Anklebesphären der 2-Henkel (braun) dargestellt. Der Durchschnitt der durch die verbundene Summe definierten reduzierenden Sphäre S mit der Heegaard-Fläche Σ ist in Abbildung 5 rot angedeutet.

Im Beweis von Satz 19 werden wir sehen, dass die reduzierende Sphäre S isotop ist zu einer Heegaard-reduzierenden Sphäre S' und wir erhalten umgekehrt planare Heegaard-Diagramme der Faktoren aus dem Diagramm von $S^1 \times S^2 \# \mathbb{R}P^3$.

2. Das Lemma von Haken

In diesem Abschnitt nutzen wir die bisherigen Vorbereitungen, um Hakens Lemma zu formulieren und zu beweisen. Der ursprüngliche Beweis von Haken findet sich in [3], in dieser Arbeit folgen wir den Darstellungen in [1] und [4].

Satz 19 (Lemma von Haken). *Sei M eine reduzible, geschlossene und orientierbare 3-Mannigfaltigkeit. Dann ist jede Heegaard-Zerlegung von M reduzibel.*

Beweis. Sei Σ Heegaard-Fläche einer Heegaard-Zerlegung $M = H_1 \cup H_2$. Da M reduzibel ist, gibt es eine reduzierende Sphäre, die wir mit einer Isotopie so einrichten können, dass sie die Heegaard-Fläche transversal schneidet. Sei S eine solche reduzierende Sphäre, so dass die Anzahl der Komponenten von $S \cap \Sigma$ minimal ist.

Wenn wir zeigen können, dass dieser Durchschnitt genau eine Komponente besitzt, ist $S \cap \Sigma$ eine nicht-triviale, einfach geschlossene Kurve auf Σ , die in den Henkelkörpern H_i eine nicht-triviale, eigentliche Scheibe berandet. Dann ist aber S eine Heegaard-reduzierende Sphäre und liefert folglich die Behauptung. Wir wollen also die Anzahl der Komponenten von $S \cap \Sigma$ bestimmen.

Dazu weisen wir zunächst nach, dass diese positiv ist: Man kann zeigen, dass Henkelkörper irreduzibel sind. Gegeben dieses Resultat, muss die reduzierende Sphäre S die Heegaard-Fläche schneiden, das heißt, es gilt $\Sigma \neq \emptyset$.

Als Nächstes zeigen wir, dass $S \cap \Sigma$ zusammenhängend ist: Da S so gewählt ist, dass die Anzahl der Komponenten des Durchschnitts von S und der Heegaard-Fläche minimal ist, sind die Durchschnitte $S_i = S \cap H_i$ inkomprimierbar, denn andernfalls würde eine Kompression von S_i eine reduzierende Sphäre in M liefern, die die Heegaard-Fläche weniger oft schneidet.

Sei F (in Abbildung 6 grün) eine Komponente von S_i . Dann ist F eine planare Fläche, das heißt, F ist eine Fläche, die eine Einbettung in die Ebene \mathbb{R}^2 besitzt.

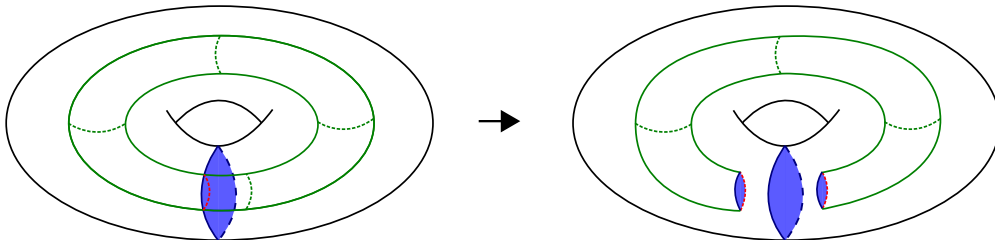


Abbildung 6: Randkompressionen von S im Beweis von Satz 19

Sei weiterhin $E = \{D\}$ eine maximale Menge disjunkter, die Heegaard-Fläche Σ in H_i komprimierender Scheiben D (in Abbildung 6 blau). Durch eine Isotopie können wir einrichten, dass F jede der Scheiben $D \in E$ in einem in F nicht-trivialen, eigentlichen Bogen schneidet, das heißt, dass $\{K \cap D\}_{D \in E}$ eine Menge disjunkter, nicht-trivialer eigentlicher Bögen (in Abbildung 6 rot) in F ist. Mittels Randkompressionen über die Scheiben D an jedem der Bögen erhalten wir eine Fläche F' , deren Komponenten jeweils in einem Ball von $H_i - \cup_{D \in E} D$ enthalten sind.

Da F eine Komponente der inkomprimierbaren Fläche S_i und damit selbst inkomprimierbar ist, ist nach Bemerkung 12 auch die aus F durch Randkompression entstehende Fläche F' inkomprimierbar. Folglich ist jede Komponente von F' eine inkomprimierbare, eigentlich in einen Ball eingebettete, planare Fläche, also eine Scheibe.

Randkompression von F entlang der beschriebenen Bögen liefert also eine Fläche F' , bestehend aus Scheiben. Diese Randkompressionen der Komponenten von $S_i = S \cap H_i$ entsprechen einer Isotopie der gesamten Sphäre S , wie in Abbildung 7 veranschaulicht ist.

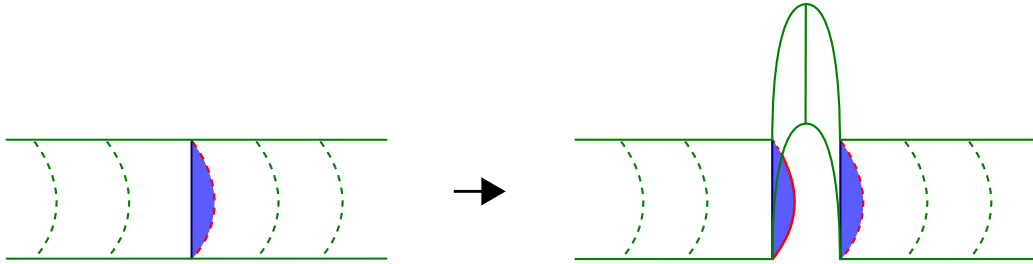


Abbildung 7: Isotopie der reduzierenden Sphäre im Beweis von Satz 19

In der Abbildung ist die Heegaard-Fläche durch die Tafelenebene gegeben. Randkompression von F bedeutet Aufschneiden längs eines Bogens α (in Abbildung 7 rot) und Einkleben zweier paralleler, disjunkter Kopien der Scheibe $D \in E$ (in Abbildung 7 blau). Dies entspricht einer Isotopie von S , indem wir den Bogen α über die Scheibe in den komplementären Henkelkörper drücken.

Sei nun $A \subset \{F \cap D\}_{D \in E}$ eine minimale Familie von Bögen α , so dass Randkompression über diese Bögen eine Fläche F' , bestehend aus Scheiben, liefert. Aufschneiden entlang $\alpha \in A$ in jedem Schritt der Randkompression von F zu F' erhöht jeweils die Anzahl der Randkomponenten b um eins, falls α nur eine Randkomponente schneidet (wie in Beispiel 11) und reduziert die Anzahl der Randkomponenten um eins, falls α zwei Randkomponenten schneidet (wie in Abbildung 6).

Wir zeigen mittels vollständiger Induktion über die Anzahl b der Randkomponenten planarer Flächen, dass die Anzahl der Randkompressionen, die b reduzieren, strikt größer ist als die Anzahl der Randkompressionen, die eine zusätzliche Randkomponente liefern, das heißt, wir erhalten $b' < b$, wenn b' die Anzahl der Randkomponenten von F' bezeichnet:

Die einzige planare Fläche, die nur eine Randkomponente besitzt ist eine Scheibe. Den Fall $b = 1$ brauchen wir also nicht zu betrachten. Die einzige planare Fläche mit zwei Randkomponenten ist der Annulus, in dem Aufschneiden entlang jedes nicht-

trivialen Bogens eine Scheibe liefert, also eine Fläche mit nur einer Randkomponente.

Für den Induktionsschritt betrachten wir eine Randkompression entlang eines Bogens α in einer Fläche F mit $b > 2$ Randkomponenten, die eben diese erhöht. Durch eine solche Randkompression erhalten wir eine Fläche F'' mit $b'' = b + 1$, bestehend aus zwei Komponenten F_1'' und F_2'' , für die $b'' = b_1'' + b_2''$ gilt, wobei b_i'' die Anzahl der Randkomponenten von F_i'' bezeichnet. Da α ein nicht-trivialer Bogen ist, das heißt keine Scheibe berandet, gilt außerdem $b_i'' > 1$ für $i = 1, 2$, und damit folglich auch $b_i'' < b$ für $i = 1, 2$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann die zu beweisende Aussage für die Flächen F_1'' und F_2'' , das heißt, die Anzahl der Randkompressionen, die b_i'' erhöhen, ist strikt kleiner als die derer, die b_i'' reduzieren. Für die Anzahl der Randkomponenten b' , die nach allen Randkompressionen entlang der Bögen in A übrig bleiben, gilt dann

$$b' \leq b_1'' - 1 + b_2'' - 1 = b'' - 2 = b - 1.$$

Falls die erste Randkompression von F entlang α schon die Anzahl der Randkomponenten verringert hat, gilt analog

$$b' \leq b'' - 1 = b - 2.$$

Wir haben also gezeigt, dass wir durch eine Isotopie von S eine reduzierende Sphäre S' erhalten, so dass die Anzahl der Komponenten des Durchschnitts von S' und der Heegaard-Fläche Σ kleiner ist als die Anzahl der Komponenten von $S \cap \Sigma$. Dies steht im Widerspruch zur Wahl von S als die Sphäre für die diese Zahl minimal ist. Folglich ist jede Komponente von $S_i = S \cap H_i$ eine Scheibe.

Damit ist aber S eine Vereinigung von Sphären, wobei jede Komponente durch Verkleben einer Komponente von jeweils S_1 und S_2 entsteht.

Da S eine Sphäre ist, besteht also $S \cap \Sigma$ aus genau einer Komponente und berandet in den Henkelkörpern H_i der Heegaard-Zerlegung von M jeweils eine Scheibe. \square

Bemerkung 20. Im Beweis von Satz 19 haben wir gesehen, dass, für eine gegebene Heegaard-Zerlegung der Mannigfaltigkeit M , eine reduzierende Sphäre S in M isotop ist zu einer Heegaard-reduzierenden Sphäre S' . Dazu verringern wir durch Isotopien, die den beschriebenen Randkompressionen entsprechen, die Anzahl der Komponenten des Durchschnitts der reduzierenden Sphäre und der Heegaard-Fläche hinreichend oft, so dass sie minimal ist.

3. Anwendungen

Schließlich wollen wir in diesem letzten Abschnitt die bisherigen Resultate verwenden, um Anwendungen zu diskutieren. Die Darstellungen orientieren sich dabei an [5].

3.1. Additivität des Heegaard-Geschlechts

Definition 21. Sei M eine geschlossene, orientierbare und zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit. Wir definieren das **Heegaard-Geschlecht** $g(M)$ von M als das Minimum der Geschlechter aller Heegaard-Zerlegungen von M .

Wie schon in Beispiel 18 erwähnt, wird in [5] gezeigt, dass ein planares Heegaard-Diagramm der verbundenen Summe $M_1 \# M_2$ zweier geschlossener, orientierbarer 3-Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 gegeben ist durch Nebeneinanderschreiben planarer Heegaard-Diagramme von M_1 und M_2 . Folglich erhält man sofort ein Diagramm einer Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht $g(M_1) + g(M_2)$ von $M_1 \# M_2$ und somit die Abschätzung $g(M_1 \# M_2) \leq g(M_1) + g(M_2)$. Wir wollen nun mithilfe des Lemmas von Haken zeigen, dass sogar die Gleichheit gilt.

Korollar 22. *Seien M_1 und M_2 geschlossene, orientierbare und zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeiten. Dann gilt*

$$g(M_1 \# M_2) = g(M_1) + g(M_2).$$

Beweis. Es bleibt zu zeigen, dass auch $g(M_1 \# M_2) \geq g(M_1) + g(M_2)$ gilt. Falls $M_1 = S^3$ oder $M_2 = S^3$ gilt, folgt die Aussage sofort.

Ist kein Summand trivial, so ist $M = M_1 \# M_2$ eine reduzible, geschlossene und orientierbare 3-Mannigfaltigkeit. Nach Hakens Lemma ist also auch jede Heegaard-Zerlegung von M reduzibel.

Insbesondere ist die durch die Zerlegung $M = M_1 \# M_2$ gegebene Sphäre S eine reduzierende Sphäre. Nach Bemerkung 20 erhalten wir folglich eine zu S isotope Heegaard-reduzierende Sphäre S' in M , die die Zerlegung $M = M_1 \# M_2$ liefert und Heegaard-Zerlegungen von M_1 und M_2 vom Geschlecht g_1 und g_2 induziert, so dass $g_1 + g_2 = g$ gilt, wobei g das Geschlecht der Heegaard-Zerlegung von M bezeichnet. Wählen wir eine Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht $g(M)$, erhalten wir

$$g(M) = g = g_1 + g_2 \geq g(M_1) + g(M_2).$$

□

3.2. Primfaktorzerlegung

Korollar 23. *Sei M eine geschlossene, orientierbare 3-Mannigfaltigkeit. Dann gibt es eine Primfaktorzerlegung $M = M_1 \# \dots \# M_n$, wobei für die Anzahl n der Faktoren der Zerlegung $n \leq g(M)$ gilt.*

Beweis. Ist M bereits prim, ist nichts zu zeigen. Ist die Mannigfaltigkeit nicht prim, ist sie insbesondere nicht irreduzibel, das heißt reduzibel.

Sei eine Heegaard-Zerlegung von M von minimalem Geschlecht $g(M)$ gegeben. Nach Hakens Lemma gibt es eine Heegaard-reduzierende Sphäre S für diese Heegaard-Zerlegung, das heißt, es gibt eine Zerlegung $M = M_1 \# M_2$, so dass für das Geschlecht g_i der induzierten Heegaard-Zerlegung von M_i die Gleichung $g(M) = g_1 + g_2$ gilt. Falls M_1 und M_2 prim sind, haben wir eine Primfaktorzerlegung von M gefunden. Andernfalls iterieren wir diesen Prozess. Da die 3-Sphäre die einzige 3-Mannigfaltigkeit mit Heegaard-Geschlecht 0 ist, ist die Anzahl der Summanden beschränkt durch $g(M)$ und wir erhalten nach endlich vielen Iterationen eine Primfaktorzerlegung von M . □

Man kann zeigen, dass die Primfaktorzerlegung einer geschlossenen, orientierbaren 3-Mannigfaltigkeit, bis auf Sortierung, eindeutig ist. Beweise dazu finden sich beispielsweise in [1] und [4].

Literatur

- [1] D. CALEGARI, *Notes on 3-manifolds*, Manuskript der Vorlesung 'Introduction to 3-Manifolds Winter 2014', online abgerufen am 24.04.2018: https://math.uchicago.edu/~dannyc/courses/3manifolds_2014/3manifolds_2014.html.
- [2] H. GEIGES, *Geometrische Topologie*, Manuskript der Vorlesung im WS 2017/18.
- [3] W. HAKEN, *Some results on surfaces in 3-manifolds*, Studies in Modern Topology (MAA Studies in Mathematics ed. P. Hilton), 39–98, Prentice–Hall, Englewood Cliffs (1968).
- [4] W. JACO, *Lectures on three-manifold topology*, CBMS Regional Conference Series in Math. **43**, American Mathematical Society, Providence (1980).
- [5] M. KEGEL, *Kirby-Kalkül*, Manuskript der Vorlesung im SS 2018.
- [6] F. WALDHAUSEN, Heegaard-Zerlegungen der 3-Sphäre, *Topology* **7** (1968), 195–203.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne die Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten und nicht veröffentlichten Schriften entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit ist in gleicher oder ähnlicher Form oder auszugsweise im Rahmen einer anderen Prüfung noch nicht vorgelegt worden. Ich versichere, dass die eingereichte elektronische Fassung der eingereichten Druckfassung vollständig entspricht.

Köln, 12. Juli 2018

Lennart Struth